III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

<u>РОЗВ'ЯЗАННЯ</u>

7 клас

1. Права частина рівності при будь-якій розстановці знаків «+» чи «-» є парною. В лівій частині – 1005 непарних чисел (і стільки ж парних), а будь-яка комбінація непарної кількості непарних чисел є непарною. Отже, рівність неможлива.

2. Нехай на початок 2008 року чисельність мешканців міста дорівнювала x. Виходячи з умови, маємо: $x \cdot 1,08 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 272916.$ Звідси $x = 280\,000.$

3. Очевидним є ланцюжок нерівностей:

$$\frac{2011}{2010} = 1 + \frac{1}{2010} < 1 + \frac{1}{2009} = \frac{2010}{2009} < \frac{2009}{2008} < \ldots < \frac{3}{2}.$$

Отже, шуканих дробів 2008 штук.

4. Покажемо, як записати дані числа в рядок:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

Щоб переконатись, що дані числа не можна розташувати по колу зі збереженням заданої властивості, достатньо помітити, що 16 дає квадрат лише при додаванні з числом 9. Отже, у числа 16 може бути лише один сусід. Єдиного сусіда може мати і число 8.

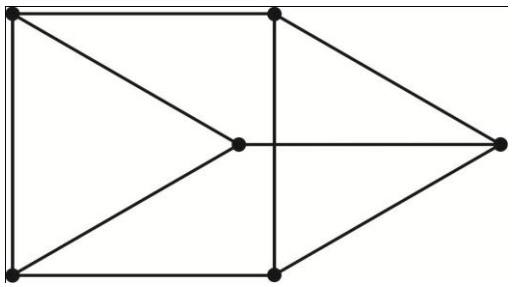
5. Нехай x – кількість хлопчиків, y – дівчаток; a – ціна пиріжка, b – тістечка. За умовою

$$ax + by + 1 = bx + ay \Rightarrow (x - y)(b - a) = 1; \;\; x > y; \;\; b - a > 0,5.$$

Враховуючи, що x і y цілі, маємо $\begin{cases} x - y = 1; \\ b - a = 1, \end{cases}$

тобто, хлопчиків на 1 більше, ніж дівчаток, а тістечко дорожче за пиріжок на 1грн.

м. Суми, 2011 р.

6. 

8 клас

1. Всіх учасників олімпіади можна розділити на 4 групи: синьоокі дівчата, несиньоокі дівчата, синьоокі хлопці, несиньоокі хлопці. За умовою серед учасників олімпіади 80% − синьоокі, отже, 20% − несиньоокі. Далі, 70% − хлопці, отже, 30% − дівчата. Нехай несиньооких дівчат – x%. Тоді синьооких дівчат – (30 – x) %. Крім того, на олімпіаді (20 – x) % несиньооких хлопців. Таким чином, синьооких хлопців серед учасників олімпіади: 100% − x% − (30 – x)% − (20 – x)% =50% + x%. Отже, за умови відсутності несиньооких дівчат синьоокі хлопці складають половину учасників олімпіади і твердження є неправильним.

2. Т ак, бо показник 2010^{2009} є числом парним.

3. Мама випікає за хвилину $\frac{100}{30}=3\frac{1}{3}$ млинця, донька $\frac{100}{40}=2\frac{1}{2}$ млинця. Тато з сином за хвилину з'їдають $\frac{100}{60}=1\frac{2}{3}$ млинця. Отже, кожну хвилину на столі з'являється $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}=4\frac{1}{6}$ млинця, а 100 млинців на столі виявиться через $100:4\frac{1}{6}=24$ хвилини.

4. Будемо вважати шукані дроби додатними числами: $a\frac{b}{c}$ і $m\frac{n}{k}$.

За умовою $\begin{cases} \frac{ac+b}{c}:\frac{mk+n}{k}=\frac{a}{m}=3, \\ \frac{b}{c}+\frac{n}{k}=\frac{m}{a}. \end{cases}$

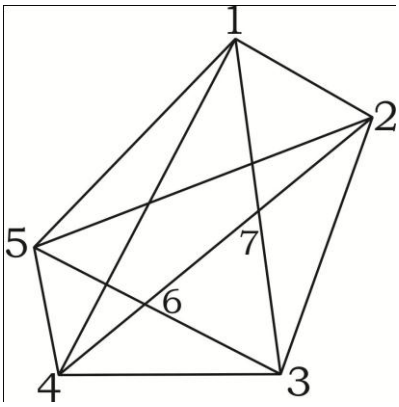
Пошук найменшої пари чисел почнемо зі значень $m=1$ і $a=3m=3$. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{(3c+b)k}{c(k+n)} = 3, \\ 3(bk+cn) = ck, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bk = 3cn, \\ 3(3cn+cn) = ck, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bk = 3cn, \\ 12n = k. \end{cases}$$

Продовжуємо пошук при $n=1,\ k=12.$ Тоді $12b = 3c,$ звідки при $c=1$ одержуємо $b=4.$ Отже, остаточно одержуємо числа $3\frac{1}{4}$ і $1\frac{1}{12}$.

5. Очевидно, остання цифра більша за 1. Число просте, отже, воно не може закінчуватись на 2, 4, 6, 8 та 5. Якщо б останньою була цифра 3 чи 9, то сума всіх цифр числа, а отже, і саме число ділилось би на 3. Таким чином, залишилась лише цифра 7.

Зазначимо, що існує 4 числа, що задовольняють умову: 167, 257, 347, 527. Втім, знаходити їх за умовою не вимагалось.



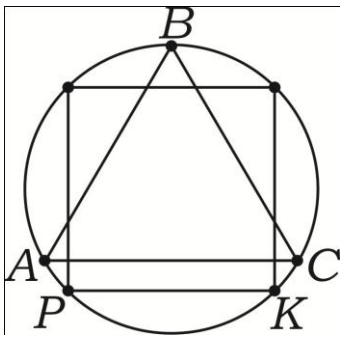
6. $\angle 6 = \angle 2 + \angle 5,$

$\angle 7 = \angle 1 + \angle 4,$

$\angle 6 + \angle 7 + \angle 3 = 180^\circ.$

Отже, $\angle 1 + \angle 2 + + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ.$

7. По принципу Діріхле на одну із дуг, утворених вершинами трикутника, потрапляє дві вершини квадрата. Нехай, наприклад, $P, K \in (AC).$



$$l(AC) = \frac{2\pi}{3};\ l(PK) = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow l(AP) + l(KC) = \frac{\pi}{6}.$$

Звідси, хоча б один із доданків не більший за $\frac{\pi}{12}$, або довжина хоча б однієї з цих дуг не більша за $\frac{\pi}{12}$.

м. Суми, 2011 р.

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

9 клас

1. Нехай S – відстань між спостерігачами, x – швидкість автобуса, t – проміжок часу, через який повз першого спостерігача послідовно проїхали автобус, мотоцикл, автомобіль. Тоді час, витрачений автобусом, мотоциклом, автомобілем на шлях від одного спостерігача до другого відповідно дорівнює $\frac{S}{x}, \frac{S}{30}, \frac{S}{60}$. З умови задачі

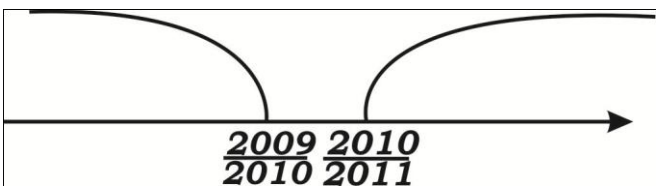
$$\begin{cases} \frac{S}{30} = \frac{S}{x} + t, \\ \frac{S}{60} = \frac{S}{x} - t, \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{30} + \frac{S}{60} = \frac{2S}{x} \Rightarrow x = 40.$$

Отже, швидкість автобуса − 40 км/год.

2. Припустимо, що таке натуральне n існує. Тоді, якщо n − парне, то ліва частина рівності – парна, а права є непарним числом. Навпаки, якщо n − непарне, то ліва частина рівності – непарна, а права є парним числом. Отже, такого числа немає.

3. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2009 - 2010x \ge 0, \\ 2011x - 2010 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{2009}{2010}, \\ x \ge \frac{2010}{2011}. \end{cases}$$



Але $\frac{2009}{2010} = 1 - \frac{1}{2010} < 1 - \frac{1}{2011} = \frac{2010}{2011}$.

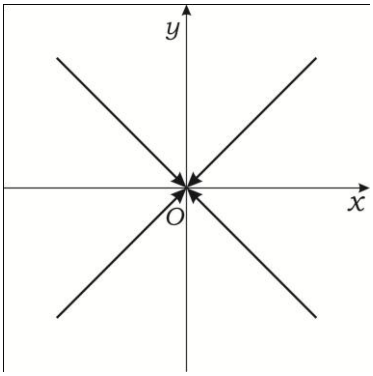
Отже, система несумісна і рівняння не має розв'язків.

4. Скористаємось тотожністю: $\underbrace{111...1}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}$.

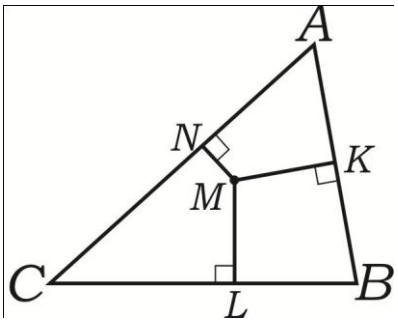
5. Очевидно, що коренями даного рівняння третього степеня є чотири значення: $x = a,\ x = b,\ x = c,\ x = d$, отже, задана рівність є тотожністю.

м. Суми, 2011 р.

6.



7.



Нехай M − довільна точка всередині рівностороннього трикутника ABC; $MK \perp AB,\ ML \perp BC,\ MN \perp AC.$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(MK \cdot AB + ML \cdot BC + MN \cdot AC\right).$ Але $AB = AC = BC,$ отже,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\left(MK + ML + MN\right),$ а $MK + ML + MN = \frac{2S_{ABC}}{AB}$ і є величиною сталою. Нехай $AB = a.$ Перевіримо можливість рівності $\frac{2S_{ABC}}{AB} = 2011,$ або

$S_{ABC} = \frac{2011a}{2}$. $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, звідси $\frac{\sqrt{3}a}{4} = \frac{2011}{2}$ і $a = \frac{2011 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{4022}{\sqrt{3}}$.

10 клас

1. Відмітимо, що при підвищенні курс акцій множиться на $\frac{113}{100}$, а при зниженні – на $\frac{87}{100}$. Отже, k після підвищень і n знижень він буде помноженим на $\left(\frac{113}{100}\right)^k \left(\frac{87}{100}\right)^n$. Співпадання курсу означає, що цей множник дорівнює 1. Звідси,
$113^k \cdot 87^n = 10^{2(k+n)}.$ Але рівність не справджується при жодних k і n, бо в лівій його частині число завжди є непарним, а в правій – парним.

2. *1-ий спосіб.* Порівняємо квадрати цих чисел:

$$\left(\sqrt{2009}+\sqrt{2011}\right)^2 = 4020 + 2\sqrt{2009\cdot 2011},$$

$$\left(2\sqrt{2010}\right)^2 = 4\cdot 2010 = 4020 + 2\sqrt{2010^2}.$$

Враховуючи, що $2009\cdot 2011 = (2010-1)(2010+1) = 2010^2 - 1 < 2010^2$ і функція $f(x)=\sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0,+\infty)$, отримуємо:

$$\sqrt{2009}+\sqrt{2011} < 2\sqrt{2010}.$$

2-ий спосіб. Порівняємо числа $\sqrt{2011}-\sqrt{2010}$ та $\sqrt{2010}-\sqrt{2009}$. До кожної із різниць застосуємо тотожність

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad a, b > 0:$$

$$\sqrt{2011}-\sqrt{2010} = \frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}};$$

$$\sqrt{2010}-\sqrt{2009} = \frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2010}}.$$

Зрозуміло, що перше число менше, ніж друге, тому

$$\sqrt{2009}+\sqrt{2011} < 2\sqrt{2010}.$$

3-ий спосіб. Розглянемо функцію $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}, \quad x\in[0,+\infty)$.

Оскільки для всіх $x>0$: $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$, то функція $g(x)$ спадає на проміжку $[0,+\infty)$. Отже, $\sqrt{2011}-\sqrt{2010}<\sqrt{2010}-\sqrt{2009}$, звідки знову приходимо до нерівності $\sqrt{2009}+\sqrt{2011}<2\sqrt{2010}$.

4-ий спосіб. Застосуємо нерівність між середнім арифметичним і середнім квадратичним для невід'ємних чисел:

$$\frac{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}{2} < \sqrt{\frac{2009+2011}{2}} = \sqrt{\frac{2010}{2}}.$$

Помножимо останню нерівність на 2 і отримаємо

$$\sqrt{2009}+\sqrt{2011} < 2\sqrt{2010}.$$

3. Позначимо $\frac{1}{2x-3}=t$, тоді $x=\frac{1+3t}{2t}$. З умови $g(t)=\frac{1+3t}{2t}$, або $g(x)=\frac{1+3x}{2x}$.

м. Суми, 2011 р.

4. $y^2 = x^2 - 2\sqrt{x^2-1} + x^2 + 2\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{x^4-4x^2+4} = 2x^2 - 2\left|x^2-2\right|.$

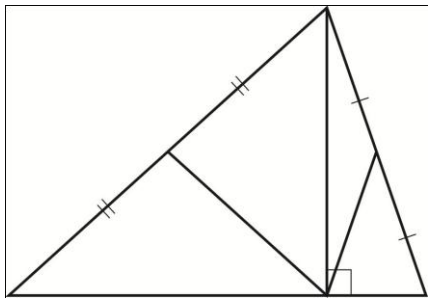
Отже, при $|x| \ge \sqrt{2}$ $y^2 = 4;$ при $|x| < \sqrt{2}$ $y^2 = 4x^2 - 4.$ Крім того, зазначимо, що $|x| \ge 1,$ а $y \le 0$. Таким чином, остаточно маємо

$$y = \begin{cases} -2\sqrt{x^2-1}, & 1 \le |x| < \sqrt{2}, \\ -2, & |x| \ge \sqrt{2}. \end{cases}$$

5. Якщо (a_n) − арифметична прогресія з різницею d, то

$$p = a_k + a_{2k} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (2k-1)d = 2a_1 + (3k-2)d,$$

$$S_{3k-1} = \frac{2a_1 + (3k-2)d,}{2} \cdot (3k-1) = \frac{p}{2}(3k-1).$$



6. Хоча б одна з висот трикутника лежить всередині трикутника, а отже, ділить його на 2 прямокутних трикутника. Медіани, проведені на гіпотенузи, ділять ці трикутники на пари рівнобедрених трикутників.

7. Скористаємось рівністю $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ за умови, що $a + b + c = 0.$ Позначивши $a = x - y,\ b = y - z,\ c = z - x,$ одержимо

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

8. $\left(a^2+b^2\right)^{1005} > \left(a^2\right)^{1005} + \left(b^2\right)^{1005} = \left(c^2\right)^{1005} \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow$

$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 0,$ отже, найбільший кут C− гострий і заданий трикутник гострокутний.

11 клас

1. Кількість співмножників у лівій і правій частинах нерівності – однакова, але у правій – всі дорівнюють n, а в лівій є менші за n.

2. Прикладом такого рівняння є $x^2+3x+2=0,$ або будь-яке рівняння виду $x^2+(q+1)x+q=0,\ q\in\square$, корені якого -1 і -$q$.

Збільшення на 1 коефіцієнтів такого рівняння означає додавання до його лівої частини $(x+1)$. При цьому одержане рівняння, як і дане, матиме корінь -1, другий його корінь зменшиться на 1 й залишиться цілим. Властивість залишиться при будь-якій кількості κ таких операцій.

3. Переписавши рівняння у вигляді

$$\{x\}=\left[x^{2011}\right]+\left[x^{2010}\right]+...+\left[x^2\right]+[x]+1,$$

бачимо, що дробова частина числа x дорівнює цілому числу, що можливо лише при $\{x\}=0.$ Отже, x − ціле число і рівняння набуває вигляду

$$x^{2011}+x^{2010}+...+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^{2010}+x^{2008}+...+x^2+1\right)=0$$

Єдиним дійсним коренем останнього, як і даного рівняння є $x=-1.$

4. $y'=\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}\right)'=0;$ крім того, і функція, і похідна існують при $x\neq-1$. Отже, $y=const$ на проміжках $(-\infty,-1)$ та $(-1,+\infty)$. Знайдемо ці значення, підставивши по одній точці з кожного інтервала. Остаточно одержимо:

$$y=\begin{cases}-\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & x>-1.\end{cases}$$

5. Склавши почленно рівності

$f(2)=f(1)+a^2,$

$f(3)=f(2)+a^3,$

.....

$f(n)=f(n-1)+a^n,$

одержимо

$f(n)=f(1)+a^2+a^3+...+a^n$, або $f(n)=\begin{cases}1+\dfrac{a^2\left(a^{n-1}-1\right)}{a-1}, & a\neq 1,\\ n, & a=1\end{cases}$.

6. $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=1\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=1$

$\left(a+b+c\right)^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0,$

але $a^2+b^2+c^2=1,$ отже, $ab+ac+bc=-\dfrac{1}{2},\ \left(ab+ac+bc\right)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2acb^2+2bca^2+2abc^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2acb\underbrace{\left(a+b+c\right)}_{0}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\dfrac{1}{4}$

Остаточно маємо:

$a^4+b^4+c^4+\dfrac{1}{2}=1\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}.$

7. Нехай $a>b>c.$ Розглянемо функцію

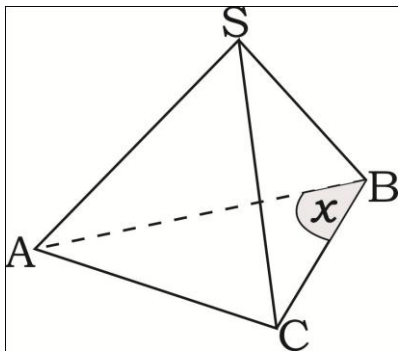
$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a).$$

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0,$$
$$f(b)=(b-c)(b-a)<0,$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0.$$

Отже, дане квадратне рівняння має два корені, розташовані на інтервалах $(a,\ b)$ і $(b,\ c)$..

8. Нехай $\angle BSC=\alpha,\ \angle ASB=\beta,\ \angle ASC=\gamma.$

Проводимо $BA\perp SB,\ BC\perp SB.$



м. Суми, 2011 р.

$\angle ABC = x -$ лінійний кут двогранного кута $ASBC$.

Нехай $SB = a.$ З ΔASB : $SA = \dfrac{a}{\cos\beta}$, $AB = a\,tg\beta.$

З ΔCSB : $SC = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, $CB = a\,tg\alpha.$

З ΔASC за теоремою косинусів: $AC^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\alpha} + \dfrac{a^2}{\cos^2\beta} - 2\dfrac{a^2}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma.$.

З іншого боку, $AC^2 = a^2\,tg^2\alpha + a^2\,tg^2\beta - 2a^2\,tg\alpha\,tg\beta\cos x,$ звідки

$\cos x = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$

Аналогічно: $\cos y = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\,\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\beta}$, $\cos z = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\,\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$

м. Суми, 2011 р.